

Medve Szabadtéri Matekverseny

Országos döntő

Medvebocs kategória (5. és 6. osztály)

Feladatok részletes megoldással



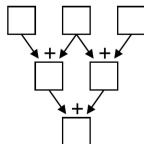
2019. június 1.

Tartalomjegyzék

1. feladat	2
2. feladat	3
3. feladat	4
4. feladat	5
5. feladat	6
6. feladat	7
7. feladat	8
8. feladat	9
9. feladat	10
10. feladat	11
11. feladat	12
12. feladat	13
13. feladat	14
14. feladat	15
15. feladat	17
Végeredmények	19

1. feladat

Medve László véletlenül feltalálta az ábrán látható Brumma-Szumma nevű összeadógépet. A vízszintesen egymás mellett lévő dobozokba kerülő számok összege a megfelelő, alattuk nyilakkal kijelölt dobozba jut. Mindez addig megy, amíg a legalsó dobozba is kerül szám. Unalmas óráiban László pozitív egyjegyű számokat szokott bedobálni az összeadógép tetején lévő három üres dobozba (egyszerre mindig különböző számokat), majd feljegyzi a gép alján kipottyanó végeredményt. Mekkora a különbség a lehető legnagyobb, illetve a lehető legkisebb végeredmény között?



Végeredmény

26

Megoldás

1. Az összeadógép alján kipottyanó eredmény a második szintre kerülő két szám összegével egyenlő.
2. A második szintre kerülő két szám összege pontosan annyival nagyobb a László által kiválasztott három szám összegénél, mint amekkora a középső dobozba kerülő szám.
Ez azért igaz, mert ha László például az 2, 5, 3 számokat dobja be (ebben a sorrendben) a gépbe (melyeknek összege $2 + 5 + 3 = 10$), akkor a második szintre a $2 + 5 = 7$ és az $5 + 3 = 8$ számok kerülnek, melyeknek összege $7 + 8 = (2 + 5) + (5 + 3) = (2 + 5 + 3) + 5 = 15$. Könnyen átlátható, hogy ez minden esetben így van.
3. A végeredmény tehát akkor lesz a legnagyobb, ha a László által bedobott három szám összege a lehető legnagyobb, és a bedobott számok közül a legnagyobb kerül a középső dobozba. Azaz a 7, 9, 8 számokat kell bedobnia ebben a sorrendben (a 7-es és a 8-as persze felcserélhető).
Ekkor a végeredmény $(7 + 9) + (9 + 8) = 33$ lesz.
4. A legkisebb pedig akkor lesz végeredmény, ha a László által bedobott három szám összege a lehető legkisebb, és a bedobott számok közül a legkisebb kerül a középső dobozba. Azaz a 2, 1, 3 számokat kell bedobnia ebben a sorrendben (a 2-es és a 3-as persze felcserélhető).
Ekkor a végeredmény $(2 + 1) + (1 + 3) = 7$ lesz.
5. A legnagyobb és a legkisebb lehetséges eredmény különbsége $33 - 7 = 26$.

2. feladat

Jani az egyik Medve Matektáborban felrajzolta a táblára a zsiráf és a kolibri keverékét, a zsilibrit. Alá felírta a táblára a ZSILIBRI szót, egymás után tizenkétszer. A betűk közül letörölte az összes páratlan helyen állót (elsőt, harmadikat, stb., azaz a Z-t, I-t, stb.). A maradék betűkből megint letörölte a páratlan helyeken állókat, és így tovább, mindig letörölgette a páratlan helyen álló betűket, amíg csak egy betű maradt. Mi volt ez a betű?

Végeredmény

I (mint Ilona)

Megoldás

1. megoldás

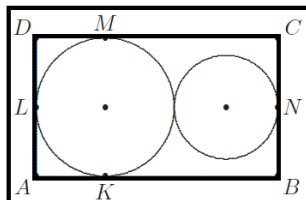
1. A feladatnak a „próbálgató” módszerrel is nekiállhatunk.
2. Vizsgáljunk először csak két egymás után írt ZSILIBRI-t!
3. Végezzük el az első lépést! Ezzel sorban a Z, I, I, R, Z, I, I, R betűket távolítjuk el, vagyis mindkét szóból ugyanazon helyeken állókat.
4. A második és a harmadik lépés során is ugyanerre a megállapításra juthatunk, ugyanis az eltávolított betűk: S, B, S, B; majd L, L.
5. Ezzel felismerhetjük, hogy akárhányszor is írjuk egymás után a szót, mivel mindig ugyanazokat a betűket töröljük le mindegyik szóból, a harmadik lépés után már csak csupa I (mint Ilona) betűnk marad.
6. Ezekből pedig csak egy I (mint Ilona) maradhat utoljára.

2. megoldás

1. A betűk eltávolításának rendje (az, hogy az elsővel kezdve minden másodikat, azaz a páratlan helyen állókat töröljük) azt eredményezi, hogy az n . lépés után azok a betűk maradnak a táblán, melyek eredetileg a 2^n -nel osztható sorszámú helyeken álltak.
2. Ebből kiindulva, az utolsó betű, amely a táblán marad, az eredeti összetételben a legnagyobb 2-hatvány sorszámú helyen áll.
3. A feladatban az egymás mögé írással $8 \cdot 12 = 96$ betűnk van, amelyből a legnagyobb 2-hatvány a 64.
4. A 64. hely (mivel 8 többszöröse) egy szóvégi betű, azaz I, mint Ilona.

3. feladat

Csajágaröcsöge főterén egy 4 méter sugarú, kör alakú szökőkút áll, kávján egy kutyát, egy lovat és egy medvét formázó vízköpővel (K, L, M pontok az ábrán). A falu polgármesterasszonya, Hat Alma egy 3 méter sugarú kör alakú talapzatra készített egy szobrot saját magáról a kút negyedik oldalára, lábánál kedvenc állatával, egy nyesttel (N pont). A szoborkompozíció köré a falulakók kérésére egy-egy akác-, bükk-, cser- és diófát is ültettek (A, B, C, D pontok). Hat Alma elrendelte, hogy az alábbi tervrajznak megfelelően a fák által meghatározott téglalap oldalai mentén, a négy állatszobor lábánál elhaladva 1 méter szélességben térkövezett sétálóutat létesítsenek (a vastag vonalak közötti területen). Hány négyzetméternyi térköre lesz szükség?



Végeredmény

48

Megoldás

1. Az egy méter széles, határoló sáv területére vagyunk tehát kíváncsiak, melyet a külső és a belső téglalapok területének különbsége ad meg.
2. A belső téglalap magassága az azt belülről érintő nagyobb kör átmérőjeként határozható meg, mely $2 \cdot 4 = 8$ m. Szélessége a két kör átmérőinek összege, azaz $2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 14$ m.
3. A külső téglalap szélessége és magassága is a belső téglalap megegyező méreteinél $2 \cdot 1$ m = 2 m-rel nagyobb, azaz rendre 16 m és 10 m.
4. A keresett terület tehát $16 \text{ m} \cdot 10 \text{ m} - 14 \text{ m} \cdot 8 \text{ m} = 160 \text{ m}^2 - 112 \text{ m}^2 = 48 \text{ m}^2$.

4. feladat

Matusz Anna bútorboltjában a forgószékekhez összesen

$$\underbrace{111111111111 \dots 11}_{2019 \text{ egyes}} \text{ db}$$

csapágygolyót rendeltek. A leltározás során a csapágygolyókat 37 db-os csomagokba rendezték, mivel egy forgószék összerakásához ennyi darabra van szükség. A csomagolás után hány darab csapágygolyójuk fog kimaradni?

Végeredmény

0

Megoldás

- Mivel 37 darabos csomagokat készítenek, a kérdés az, hogy a fenti szám mennyi maradékot ad 37-tel osztva.
- $111 = 3 \cdot 37$, tehát 111 osztható 37-tel.
- A kérdéses darabszám, azaz a 2019 darab egyesből álló szám felírható a következő alakban:
 $111 + 111 \cdot 1000 + 111 \cdot 1000000 + 111 \cdot 1000000000 + \dots$. A szám 2019 darab egyesből áll, 2019 osztható 3-mal, tehát a felírást végigcsinálva nem marad ki semmi, tényleg fel lehet írni így a számot.
- A fenti összeg minden tagja osztható 111-gyel, tehát az összeg is osztható 111-gyel. Ha az összeg osztható 111-gyel, akkor 37-tel is, hiszen 111 osztható 37-tel.
- Az összeg osztható 37-tel, tehát 0 maradékot ad vele.

2. megoldás

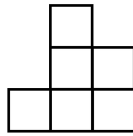
- Mivel 37 darabos csomagokat készítenek, a kérdés az, hogy a fenti szám mennyi maradékot ad 37-tel osztva.
- Kezdjük el felírni a $111111111111 \dots 11 : 37$ írásbeli osztást!

$$\begin{array}{r}
 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ : \ 37 = 3 \ 0 \ 0 \ 3 \ \dots \ 3 \ 0 \ 0 \ 3 \\
 \hline
 1 \ 1 \ 1 \\
 0 \ 1 \\
 1 \ 1 \\
 1 \ 1 \ 1 \\
 0 \ 1 \\
 \dots \\
 0 \ 1 \\
 1 \ 1 \\
 1 \ 1 \ 1 \\
 0
 \end{array}$$

- Vegyük észre, hogy a 111 osztható 37-tel, így minden harmadik lépés után 0 lesz a maradék!
- Mivel 2019 osztható 3-mal ($3 \cdot 673 = 2019$), az írásbeli osztás végén is 0-t kapunk maradékul.
- Tehát a fenti szám osztható 37-tel, így nem fog kimaradni egy csapágygolyó sem.

5. feladat

Kockaország Egységvárosában komoly szabályozások vannak az épületekre. Minden telek pontosan 3×3 egységnégyzetre van bontva. A házak 16 kockából épülnek fel, és minden kocka pontosan illeszkedik a telek egy négyzetére vagy egy másik kocka tetejére. Ráadásul előlről nézve az összes ház az ábrán megadott módon néz ki. Az Egyedi utcában minden ház különböző. Legfeljebb hány ház van az Egyedi utcában?



Végeredmény

42

Megoldás

1. Számoljuk ki, hogy azok a házak, amik előlnézetből a fenti módon néznek ki, legfeljebb hány kockából állhatnak!

- A bal oldalon minden oszlopban legfeljebb 1 kocka lehet, tehát összesen legfeljebb 3 kocka.
- Középen minden oszlopban legfeljebb 3 kocka lehet, tehát összesen legfeljebb $3 \cdot 3 = 9$ kocka.
- A jobb oldalon minden oszlopban legfeljebb 2 kocka lehet, tehát összesen legfeljebb $3 \cdot 2 = 6$ kocka.

Összesen tehát legfeljebb $3 + 6 + 9 = 18$ kockából állhat egy ház.

2. Ahhoz, hogy egy 16 kockából álló házat kapjunk, a lehető legtöbb, azaz 18 kockából álló házból 2 kockát kell elvennünk.

3. Nézzük meg, hogy hányféle módon tudunk a 18 kockából álló házból 2 kockát elvenni úgy, hogy az előlnézet nem változik!

- Ha bal oldalról veszünk el két kockát, az 3 lehetőség (3 kocka közül kettőt 3-féleképp választhatunk ki).
- Ha bal oldalról és középről veszünk el egy-egy kockát, az $3 \cdot 3 = 9$ -féle lehetőség (bal oldalról is 3-féleképp választhatjuk ki az elveendő kockát, és középről is).
- Ha bal oldalról és a jobb oldalról veszünk el egy-egy kockát, az $3 \cdot 3 = 9$ -féle lehetőség (bal oldalról is 3-féleképp választhatjuk ki az elveendő kockát, és jobb oldalról is).
- Ha középről veszünk el 2 kockát, az $3 + 3 = 6$ lehetőség (vagy két oszlopból veszünk el egy kockát, vagy egy oszlopból két kockát).
- Ha középről és jobb oldalról veszünk el egy-egy kockát, az $3 \cdot 3 = 9$ -féle lehetőség (középről is 3-féleképp választhatjuk ki az elveendő kockát, és jobb oldalról is).
- Ha jobb oldalról veszünk el két kockát, az $3 + 3 = 6$ -féle lehetőség (vagy két oszlopból veszünk el egy kockát, vagy egy oszlopból két kockát).

Többféle lehetőség nincs.

4. Ez összesen $3 + 9 + 9 + 6 + 9 + 6 = 42$ -féle lehetőség.

6. feladat

Az Urp bolygón élő zorgok mindegyikének 6 lába és 4 keze van, a lábaikon 6-6, a kezeiken 8-8 ujjal. Számolni csak az ujjaikon tudnak (ehhez a saját kéz- és lábujjaikat használják). Azokat a műveleteket, amiknek az eredménye több lenne, mint az ujjaik száma, nem tudják elvégezni.

Egyszer egy utazó találkozott két zorggal. Megkérdezte mindkettőjüktől, hogy hány pozitív osztója van a kedvenc számuknak, amire mind a ketten azt felelték, hogy kettő. Ezután megkérdezte azt is, hogy hány pozitív osztója van a két szám összegének, erre a zorgok rövid számolás után azt válaszolták, hogy három. Végül azt is megkérdezte tőlük, hogy hány osztója van a két szám szorzatának, azonban erre a zorgok nem tudtak válaszolni, mivel nem tudták összeszorozni a két számot. Mennyi a két szám szorzata?

Végeredmény

94

Megoldás

1. A zorgok $6 \cdot 6 + 4 \cdot 8 = 68$ -ig tudnak elszámolni, tehát a 68-nál nagyobb számokat nem ismerik.
2. Minden egész számnak biztosan osztója az 1, és biztosan osztója maga a szám is. Tehát ha egy számnak pontosan két osztója van, az osztóit is tudjuk: 1 és önmaga. Egyébként a pontosan két pozitív osztóval rendelkező számokat *prímeknek* nevezzük.
3. Mindkét zorg kedvenc száma prím. Jelöljük a két kedvenc számot a -val és b -vel!
4. Ha egy szám kettő vagy több különböző prím szorzata, legalább négy pozitív osztója van (ha p és q különböző prímek, $p \cdot q$ -nak osztója az 1, p , q és $p \cdot q$). Ebből tudjuk, hogy a két kedvenc szám összege nem lehet se prím, se kettő vagy több különböző prím szorzata, hiszen három pozitív osztója van. A két kedvenc szám összege, azaz $a + b$ így csak két egyforma prímszám szorzata, azaz egy prímszám négyzete lehet, ekkor az osztói az 1, p és $p \cdot p$ (azaz maga a szám).
5. Az egyetlen páros prím a 2 (hiszen a többi páros szám osztható 2-vel, így több mint két pozitív osztója van: 1, 2 és önmaga biztos osztói). Tehát $a + b$ vagy $2 \cdot 2 = 4$, vagy páratlan. Ha $a + b = 4$ lenne, $a \cdot b$ -t biztosan ki tudnák még számolni a zorgok, hiszen így nem lehetne nagyobb, mint 68. Tehát tudjuk, hogy $a + b$ páratlan.
6. Ha $a + b$ páratlan, akkor a és b közül az egyik páros, a másik páratlan. Válasszuk meg a -t és b -t úgy, hogy b páros! Tudjuk, hogy b prím is, így azt is tudjuk, hogy $b = 2$.
7. A két kedvenc szám szorzata, azaz $a \cdot b = a \cdot 2$ nagyobb, mint 68, hiszen a zorgok nem tudták kiszámolni. Innen azt is tudjuk, hogy $a > 34$.
8. $a + b = a + 2$ biztosan legfeljebb 68, hiszen a zorgok még ki tudták számolni. Az előző egyenlőtlenségből tudjuk azt is, hogy $a + 2 > 36$. Tehát tudjuk, hogy $36 < a + b \leq 68$.
9. $a + b$ -ről tudjuk, hogy egy prím négyzete. 36 és 68 között egyetlen ilyen szám van: $49 = 7 \cdot 7$.
10. $a + 2 = 49$, tehát $a = 47$. Ez stimmel is, mivel a 47 valóban prím.
11. $a = 47$ és $b = 2$, tehát $a \cdot b$, azaz a két kedvenc szám szorzata $47 \cdot 2 = 94$.

7. feladat

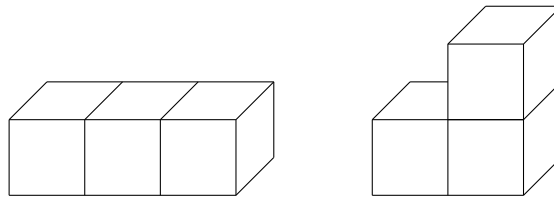
A Picur Édességgyár egyik kedvelt terméke a Barackocka. Ez úgy készül, hogy egy darab aszalt barackot kocka formájúra vágnak, majd minden lapjára különböző bevonó kerül. Így mindegyik kockának van egy fehér-csokis, egy tejsokis, egy étcsokis, egy keserű csokis, egy kakaós és egy kávé lapja. Egy gyárlátogatás során Gombóc Artúr zsebre vágott néhány Barackockát, hogy otthon megegye őket. Sajnos ezek a kockák (teljes lapfelülettel) összeragadtak a zsebében. Mivel Artúr nem bírta várni, így hazafele úton lenyalta a bevonót a zsebében lévő összeragadt test felületéről. Legalább hány Barackockát vágott zsebre Gombóc Artúr, ha ugyanannyi tejsokit nyalt le, mint amennyi étcsokit, fehér-csokit és keserű csokit összesen?

Végeredmény

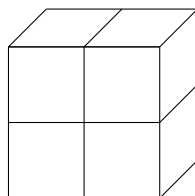
4

Megoldás

1. Egy kocka esetén a feladatban leírt csokoládéfogyasztás nem történhet meg, hiszen akkor egy lapnyi tejsokit, és összesen három lapnyi ét-, fehér- és keserű csokoládét nyalt volna le.
2. Két kocka esetén az összeragadás következtében az összes lap közül 2 nem látszik. Ekkor a test felületén a tejsokis lapok száma legfeljebb 2, az ét-, fehér- és keserű csokoládés lapok száma összesen legalább $2 \cdot 3 - 2 = 4$, hiszen az összes ilyen ízű lap közül legfeljebb 2 nem került a felszínre. Így a feladatban leírt csokoládéfogyasztás két kocka esetén nem fordulhatott elő, mert biztosan kevesebb tejsokit nyalt le, mint a másik három ízt összesen.
3. Három kocka kétféleképp ragadhat össze egy testté teljes lapfelület mentén, ahogy az ábrán látható. Mindkét esetben a kockák lapjai közül 4 kerül a test belsejébe. Így a test felületén a tejsokis lapok száma legfeljebb 3, az ét-, fehér- és keserű csokoládés lapok száma összesen legalább $3 \cdot 3 - 4 = 5$, hiszen az összes ilyen ízű lap közül legfeljebb 4 nem került a felszínre. Így a feladatban leírt eset három kocka esetén nem fordulhatott elő, mert biztosan kevesebb tejsokit nyalt le, mint a másik három ízt összesen.



4. A négy kockából előálló testek közül az ábrán látható olyan, hogy a kockáknak összesen 8 lapja kerül a test belsejébe. Ekkor a test felületén a tejsokis lapok száma legfeljebb 4, az ét-, fehér- és keserű csokoládés lapok száma összesen legalább $4 \cdot 3 - 8 = 4$. Tehát ha az összes tejsokis lap a test felszínén marad, és a test belsejébe kerülő lapok mindegyike az ét-, fehér- és keserű csokoládésak közül kerül ki, akkor előállhat a feladatban leírt csokoládéfogyasztás. Ez meg is történhet, ugyanis minden kockának két szomszédos lapja kerül a test belsejébe, és az ét-, fehér- és keserű csokoládés lapok közül bármilyen elrendezés esetén van két szomszédos.



8. feladat

Hányféleképpen állhat fel a medvevárosi kosárlabdacsapat 5 játékosa, ha egy sorban állnak, és nem állhat senki két magasabb csapattárs között? (Nincs két egyforma magasságú játékos.)

Végeredmény

16

Megoldás

1. Legyen a legmagasabb játékos Bence! A játékosoknak a sor mindkét szélétől a legmagasabb játékosig növekvő sorrendben kell felállniuk. (Ha a legmagasabb játékos a sor valamelyik szélén áll, akkor ez azt jelenti, hogy az egész csapat növekvő sorban áll.) Ha ugyanis nem növekvő sorban állnak, az azt jelenti, hogy van olyan játékos (legyen Laci), hogy közte és Bence között áll legalább egy, mindkettőjüknél alacsonyabb játékos. Ebben az esetben a Laci és Bence között álló játékosok közül a legalacsonyabb biztosan alacsonyabb mindkét szomszédjánál.
2. Ez azt jelenti, hogy ha minden játékosról tudjuk, hogy Bencének a bal vagy a jobb oldalán áll, akkor egyértelműen tudjuk a sorrendet is (hiszen Bencéig növekvő sorrendben állnak).
3. Bencén kívül négy játékos van, ők mind egymástól függetlenül kerülhetnek Bence jobb, illetve bal oldalára. Ez $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ különböző sorrendet jelent. Mivel így minden jó sorrendet pontosan egyszer számoltunk, ez a végeredmény.

9. feladat

Gerzson autójának műszerfalán található az ábrán látható hat számjegyű kijelző, ami az autó által megtett kilométerek számát mutatja, jelenleg éppen 2019-en áll. Azonban egy gyártási hiba miatt a kijelző egyik számjegy helyén sem tud 4-est mutatni, így a számláló minden számjegy helyén a 3 után rögtön az 5-ösre ugrik. Hány kilométer utat tett meg valójában az autó?

0	0	2	0	1	9
---	---	---	---	---	---

Végeredmény

1475

Megoldás

1. Elsőként fontos leszögezni, hogy az ugrások miatt most többet mutat a számláló, mint amennyi a valós érték, tehát egy 2019-nél kisebb szám a megoldás.
2. A megoldásunk 2019-nél annnyival kisebb, ahány olyan szám van 0 és 2019 között, amelyben legalább egy 4-es számjegy előfordul. Számoljuk meg ezeket helyiértékenként, magasabb helyiérték felől az alacsonyabb felé haladva!
3. Az ezresen nem értünk még el a 4-es számjegyig, így ott még nem fordult elő a hiba.
4. A százasként kétszer (ezrenként egyszer) történt olyan, hogy 3-ról 5-re ugrott a számláló, ennek során $2 \cdot 100 = 200$ számot ugrottunk át.
5. A tízes helyiértéken 20-szor (ezrenként tízszer) ugrottunk át a 4-est, mindannyiszor 10 számot kihagyva, azonban ebben benne van az a $2 \cdot 10 = 20$ szám is, amit már az előző pontban idegyűjtöttünk: 440-től 449-ig és 1440-től 1449-ig. Ezt figyelembe véve, ebben a pontban $20 \cdot 10 - 2 \cdot 10 = 180$ számot ugrottunk át újonnan.
6. Az egyes helyiértéken 202-szer (ezrenként százszor, továbbá 2000 felett még kétszer) kellett volna 4-es számjegynek állnia, melyeket a számláló hibája miatt átugrott. Ebben a 202-ben benne van az a $2 \cdot 10 = 20$, melyet a 4. pontban már idesoroltunk (404, 414, ..., 494, illetve 1404, 1414, ..., 1494), valamint az a 18 szám is, melyeket az 5. pontban gyűjtöttünk össze (44, 144, 244, 344, 544, ..., 1344, 1544, ..., 1844, 1944), azaz ehhez a ponthoz $202 - 20 - 18 = 164$ átugrott szám tartozik.
7. Összeadva az előző pontok eredményeit: $200 + 180 + 164 = 544$ -et kapunk. Mivel pontról pontra ügyeltünk arra, hogy a több 4-es számjeggyel rendelkező számokat ne számoljuk többször, így utólagos korrekcióra nincs szükség, az 544-et a 2019-ből kivonva adódik a végeredmény, ami $2019 - 544 = 1475$.

10. feladat

A Matematikus Medveképző Általános Iskola egy osztályában minden medvebocs jár háromféle szakkör valamelyikére: 17-en méhészetre, 12-en medvetáncre és 15-en kungfura. Azok száma, akik pontosan kétféle szakkörre járnak, éppen ötszöröse azok számának, akik mindhárom szakkörön részt vesznek. Az osztályba járó fiú medvebocsok egynegyede jegesmedve, a többiek barnamedvék. Hány fős az osztály, ha tudjuk, hogy a fiú barnamedvék száma megegyezik a lányok számának felével?

Végeredmény

30

Megoldás

1. A feladatban megadták, hogy hányan járnak egy-egy szakkörre. Ne hagyjuk figyelmen kívül, hogy ezekben a létszámokban azok is benne vannak, akik több szakkörre is járnak! Ez azt jelenti, hogy a fenti számok összege, $17 + 12 + 15 = 44$ lehet, hogy több, mint az osztály létszáma, hiszen lehetnek olyanok, akiket többször számoltunk.
2. Az előző pont összeadásában kétszer számoltuk azokat, akik pontosan két szakkörre járnak, és háromszor azokat, akik pontosan három szakkörre járnak (ezekről a csoportokról azt tudjuk, hogy létszámaik aránya 5:1), az osztály létszáma tehát úgy adódik a 44-ből, hogy levonjuk az előbbieket egyszer, az utóbbiakat kétszer.
3. Az előbbi pont alapján a háromszakkörösöket x -szel jelölve felírhatjuk az osztály létszámára az alábbi kifejezést: $44 - 5 \cdot x - 2 \cdot x = ?$
4. A feladat utolsó két mondata szerint a jegesmedve fiúk, a barnamedve fiúk és a lányok egymáshoz viszonyított aránya rendre 1:3:6. Mivel a fiúk-lányok létszáma csak egész szám lehet, ez az arány azt jelenti, hogy az osztály létszáma egy 10-re kerek szám.
5. Az 1. pontban adott egy felső korlát a feladat megoldására, amely így a 4. pontot is figyelembe véve 10, 20, 30 vagy 40 lehet.
6. Ha mind a négy lehetséges megoldást belepróbáljuk a 3. pont egyenletének jobb oldalára, azt tapasztaljuk, hogy 10-re, 20-ra és 40-re x nem egész számnak adódik (ami nem lehetséges, bocsokról lévén szó), 30-ra azonban igen, így a 30 a helyes megoldásunk.

11. feladat

Juliska felírt négy számot a táblára. A következő sorba szintén felírt négy számot, amelyeket az első szám-négyesből úgy kapott, hogy minden lehetséges módon összeadott hármat közülük. Hasonló módon kapta a harmadik sort a másodikból, majd a negyediket a harmadikból. A negyedik sorba a következő számok kerültek: 78, 81, 82, 83. Mi volt az eredeti számok közül a legnagyobb?

Végeredmény

6

Megoldás

- Négy szám közül hármat kiválasztani azt jelenti, hogy pontosan egyet hagyunk ki. Így ha Juliska minden lehetséges módon összead a négy szám közül hármat, mindegyik szám három esetben tagja lesz az összeadásnak, egyszer pedig kimarad.
- Vizsgáljuk először csak a harmadik és a negyedik sort! Az előbb végiggondoltak miatt a negyedik sorban szereplő számok összege háromszorosa a harmadik sorban szereplő számok összegének.

$$78 + 81 + 82 + 83 = 324$$

\implies A harmadik sorban szereplő négy szám összege $324/3 = 108$.

- A negyedik sor minden eleme pontosan három, a harmadik sorban szereplő elem összege. Tehát ha egy, a negyedik sorban szereplő számot a harmadik sorban szereplő számok összegéből kivonunk, akkor megkapjuk a harmadik sor egy elemét (pontosan azt, amelyik nem szerepelt a negyedik sor megfelelő elemét előállító számhármásban).

Így megkapjuk sorra a harmadik sor elemeit: $108 - 83 = 25$, $108 - 82 = 26$, $108 - 81 = 27$ és $108 - 78 = 30$.

25	26	27	30
78	81	82	83

- Hasonlóan megkaphatjuk a harmadik sorból a másodikikat: az összeg $108/3 = 36$, a tagok $36 - 30 = 6$, $36 - 27 = 9$, $36 - 26 = 10$ és $36 - 25 = 11$.

6	9	10	11
25	26	27	30
78	81	82	83

- Végül a másodikból az elsőt: az összeg $36/3 = 12$, a tagok $12 - 11 = 1$, $12 - 10 = 2$, $12 - 9 = 3$ és $12 - 6 = 6$.

1	2	3	6
6	9	10	11
25	26	27	30
78	81	82	83

12. feladat

A Százholdas Pagony néhány lakója összeállt egy csapatba és kincskeresésen vettek részt. Az erdőben 99 mézescsuprot találtak, melyek 1-től 99-ig voltak megszámozva. Ezután a mézescsuprokat a számozásuk alapján sorrendbe állították, majd minden kincskereső belenyalt néhány egymás után következő csuporba. Azt vették észre, hogy minden csapattag olyan csuprokba kóstolt bele, melyek sorszámainak összege pontosan 100 volt, de semelyik két tag nem választotta pontosan ugyanazokat a csuprokat. Azt is megállapították, hogy ha többen lettek volna, akkor ezt már nem tudták volna megtenni. Hányan voltak a csapatban?

Végeredmény

2

Megoldás

1. Két csuporba nem nyalhatott bele senki úgy, hogy az összeg 100 legyen, mivel a legközelebbi értékek, amit két egymást követő szám összege adhat a $49 + 50 = 99$ és az $50 + 51 = 101$. Ez két szomszédos számmal kezdődő sorozat, így köztes értéket két egymást követő számból álló összeg biztosan nem vehet föl.
2. Hasonlóan, mivel 32-től 34-ig a számok összege 99, 33-tól 35-ig pedig már 102, ezért nem lehet három szomszédos szám összege sem 100.
3. 23-tól 26-ig a számok összege 98, és 24-től 27-ig pedig már 102, ezért nem lehet négy szomszédos szám összege sem 100.
4. 18-tól 22-ig a számok összege éppen 100-zal egyenlő, tehát öt csuporba belenyalhatott valamelyik csapattag.
5. 14-től 19-ig a számok összege 99, 15-től 20-ig már 105, ezért nem lehet hat szomszédos szám összege 100.
6. 11-től 17-ig a számok összege 98, 12-től 18-ig már 105, emiatt nem lehet hét szomszédos szám összege 100.
7. 9-től 16-ig a számok összege éppen 100-zal egyenlő, tehát nyolc csuporba belenyalhatott valamelyik versenyző.
8. 7-től 15-ig a számok összege 99, 8-tól 16-ig már 108, tehát kilenc egymást követő szám összege sem lehet 100.
9. 5-től 14-ig a számok összege 95, 6-tól 15-ig már 105, tehát tíz egymást követő szám összege sem lehet 100.
10. 4-től 14-ig a számok összege 99, 5-től 15-ig már 110, ezért nem lehet tizenegy egymást követő szám összege sem 100.
11. 2-től 13-ig a számok összege 90, 3-től 14-ig már 102, ezért nem lehet tizenkét egymást követő szám összege sem 100.
12. 1-től 13-ig a számok összege 91, 2-től 14-ig már 104, tehát nem lehet tizenhárom egymást követő szám összege sem 100.
13. 1-től 14-ig a számok összege 105, tehát tizennégy, vagy annál több egymást követő pozitív egész szám összege mindig nagyobb, mint 100.
14. Ezek szerint a csapatnak legfeljebb 2 tagja lehetett, és ők 5, illetve 8 csuporba nyaltak bele.

13. feladat

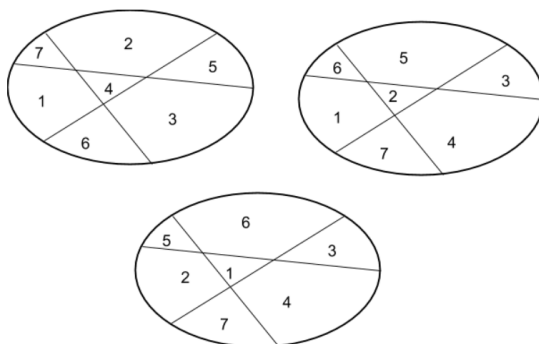
Az Óperenciás-tengeren fekvő Vadkörte-szigetre érkező telepések a szigetet három egyenes vonallal hét régióra osztották fel. Ezután a választott kormányzójuk elrendelte, hogy minden régió alapítson legalább egy, de legfeljebb hét várost úgy, hogy semelyik két régióban ne legyen azonos a városok száma. A telepések azt szeretnék, hogy mindhárom egyenesre igaz legyen, hogy a két oldalán ugyanannyi város van. Mik a lehetséges értékei a tengerrel nem érintkező régióban alapított városok számának, ha mind a kormányzó, mind a telepések kívánsága teljesül?

Végeredmény

1, 2 és 4

Megoldás

- A hét régióba 1-től 7-ig kell elhelyeznünk a számokat, tehát összesen $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$ városunk lesz.
- Tekintsük az egyik egyenes vonalat: 4 régió lesz az egyik oldalán, 3 a másikon. A 28 városból így 14-nek kell a 4 régióba és 14-nek kell a 3 régióba kerülnie.
- Próbáljuk meg szisztéma szerint, hogy melyik 4 szám összegeként jöhet ki a 14. $1 + 2 + 3$ kombinációhoz 8 lenne a negyedik szám, ez nem jó. $1 + 2 + 4 + 7$ jó kombináció. Így szisztematikusan megnézve kiderül, hogy a következő kombinációk jók:
 - $1 + 2 + 4 + 7$
 - $1 + 2 + 5 + 6$
 - $1 + 3 + 4 + 6$
 - $2 + 3 + 4 + 5$
- Három egyenes vonalunk van, és mindegyiknek az egyik oldalán 4 régió van, amibe a fenti városszámokat kell elhelyeznünk. Ez azt jelenti, hogy a fenti négy kombinációból egyszerre háromra mindig szükségünk van. Mivel mindig egyet hagyunk ki, így erre négy lehetőségünk van.
- A középső régió mindegyik egyenesnek arra az oldalára esik, ahol a 4 régió van. Ezért ennek a régiónak a városszáma mindegyik kombinációban benne kell legyen, és ez lesz a középső régióban.
- Ha az első kombinációt hagyjuk ki, akkor nincs olyan szám, ami mindhárom kombinációban benne van, így ez nem jó megoldás. Ha a második kombinációt hagyjuk ki, akkor a középső régióba 4 város kerül, ha a harmadik kombinációt, akkor 2, ha az utolsót, akkor 1.
- Rajzoljunk ábrákat a fenti feltételek alapján:



- Mivel mindhárom értékhez van jó elrendezés, mindegyik megoldás is egyben.

14. feladat

A svábbogarak börtönében 7 svábbogár sorakozott fel az ebédosztáshoz, azonosítószámuk szerint növekvő sorrendben. A konyhához vezető folyosó fala fehérre van meszelve, a padlóját pedig pontosan 2×7 csempe borítja, a börtöntöltelékek a jobb oldali csempesoron állnak. Egy csempén (biztonsági okok miatt) csak egy svábbogár állhat. Azonban rossz sorrendben álltak fel, pont fordítva kellett volna, az azonosítószám szerint csökkenő sorrendben. A fegyőr rájuk parancsol, hogy kezdjék meg az átrendeződést, a biztonsági szabályok betartásával. Minden másodpercben, a fegyőr sípszavára egy bogár átmehet egy szomszédos csempére (olyanra, melynek közös oldala van az eredeti csempével), azonban egy csempén továbbra is csak egy bogár tartózkodhat. Az ételosztás akkor kezdődhet meg, ha mindannyian a jobb oldalon, a helyes sorrendben állnak. Legkevesebb hány másodperc múlva kerülhet erre sor?

Végeredmény

36

Megoldás

- Először alsó korlátot adunk a lépések számára, majd mutatunk olyan konstrukciót, melyre ez megvalósul.
- Először is mindenkinek legalább annyit kell lépnie, mint amilyen messze van a céljától kezdetben. A sor legelején álló, 1-es azonosítójú bogárnak legalább hat lépést kell tennie, a 2-esnek négyet, a 3-asnak kettőt, a 4-esnek nullát (hiszen ő már jó helyen van), az 5-ösnek ismét kettőt, a 6-osnak 4-et és a 7-esnek hatot. Ez összesen $6 + 4 + 2 + 0 + 2 + 4 + 6 = 24$ lépés.

Legalább 6 bogárnak a másik sorba is át kell lépnie valamikor, hiszen ha lenne 2, akik sosem lépnek át, akkor ők nem tudnák megkerülni egymást, márpedig bármely kettőnek helyet kell cserélnie. Node aki átlép egyszer, annak vissza is kell lépnie valamikor, ez összesen tehát legalább $2 \cdot 6 = 12$ lépés.

Tehát biztosan szükség van legalább $24 + 12 = 36$ lépésre.

- Kezdetben a bogarak így helyezkednek el a folyosón:

bal oldal							
jobb oldal	1	2	3	4	5	6	7

Innen 6 lépéssel elérhető a következő helyzet:

bal oldal		2	3	4	5	6	7
jobb oldal	1						

Még 6 lépés árán:

bal oldal		2	3	4	5	6	7
jobb oldal							1

Innen 5 lépéssel:

bal oldal			3	4	5	6	7
jobb oldal						2	1

További 3 lépéssel:

bal oldal				4	5	6	7
jobb oldal					3	2	1

Hasonlóan tovább. A 4-esnek, aki a középső, csak 1-et kell lépnie, a 5-ösnek már 3-at, a 6-osnak 5-öt.

bal oldal							7
jobb oldal		6	5	4	3	2	1

Végül a 7-esnek 7-et:

bal oldal							
jobb oldal	7	6	5	4	3	2	1

4. Ez összesen $6 + 6 + 5 + 3 + 1 + 3 + 5 + 7 = 36$ lépés, így legalább 36 másodperc kell, ennyi elég is.

15. feladat

A Sokszögletű Kerekerdő növényzete olyan sűrűn nő, hogy azon lehetetlen átlátni. Az erdő közepén azonban ott fekszik az Ezersarkú Tisztás, mely nevéhez híven 1000 csúcús sokszög alakú, itt viszont semmi sem zavarja a látási viszonyokat. Az erdő lakói meghirdették a Századszáz Országra Szóló Bújócskaversenyt, melyet az Ezersarkú Tisztáson rendeztek. Legfeljebb hányan vehettek ezen részt, ha kezdetben semelyik két bújócskázó nem látta egymást?

Végeredmény

998

Megoldás

1. Az alábbi ábrán látható, hogyan tud egy 6 csúcús sokszög alakú tisztáson 4 versenyző elhelyezkedni úgy, hogy semelyik kettő ne lássa egymást:



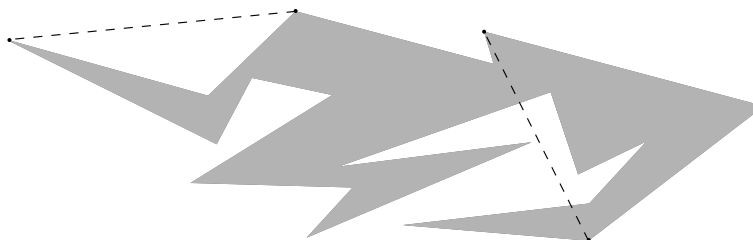
2. Ehhez hasonló elrendezést 1000 csúcús sokszöggel is meg lehet valósítani: pl a sokszög 999 csúcsa egy szabályos 1996-szög szomszédos csúcsaira esik (ekkor az 1. és a 999. csúcs épp átellenes lesz, azaz egy, az 1996-szög középpontján áthaladó átló két végpontjára illeszkedik). Az 1000. csúcsot kellően távol felvéve egy alkalmas sokszöget kapunk.
3. Bár intuitíven nagyon egyértelműnek érződik, egyáltalán nem könnyű annak indoklása, hogy 998-nál több versenyző nem bújhat el a réten. A bizonyításhoz fel fogjuk használni, az alábbi állítást:

(★) Bármely n csúcús sokszög felbontható $n - 2$ darab háromszögre.

A (★) állításból következik, hogy az 1000 csúcús sokszög esetén igaz, hogy az felbontható 998 darab háromszögre. Egy háromszögön belül legfeljebb egy versenyző lehet (minden háromszög konvex), tehát 998-nál több versenyző semmiképp nem bújhat el a réten.

(Természetesen abból, hogy két versenyző nem azonos háromszögben van, még nem következik, hogy ne látnák egymást.)

4. A (★) állítást az alábbi módon bizonyítjuk be: keresünk egy átlót, ami teljes egészében a sokszögben halad, és ennek segítségével két kisebb oldalszámú sokszögre bontjuk fel az eredeti síkidomokat. Utána mindkettő sokszögre megismételjük ezt a lépést, és így tovább, amíg a háromnál nagyobb oldalszámú sokszögek „el nem fogynak”.
5. A (★) állítás bizonyításához szükséges átlót – ami teljes egészében a sokszögön belül halad – az alábbi módon kereshetjük meg. Konvex és konkáv sokszög esetén is igaz, hogy biztosan van olyan csúcsa, ahol 180° -nál kisebb belső szöge van, hívjuk ezt a csúcsot B -nek, a vele szomszédos csúcsokat A -nak és C -nek.
 - Ha az AC szakasz teljes egészében a sokszög belsejében halad (konvex sokszög esetében ez biztosan így lesz), akkor az AC szakasz mentén két sokszögre bontottuk az eredeti síkidomunkat: egy háromszögre és egy eggyel kisebb oldalszámú sokszögre. Konkáv sokszög esetében azonban előfordulhat, hogy az AC szakasz nem a sokszögön belül halad, ahogyan azt az alábbi ábra mutatja.

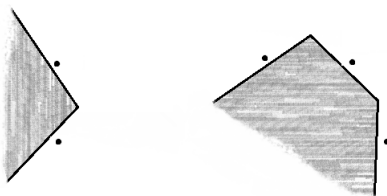


- Ha az AC szakasznak van a sokszögön kívül haladó része, akkor az ABC háromszögön belül biztosan van legalább egy csúcsa a sokszögnek. Keressük meg a sokszög ABC háromszögbe eső csúcsai közül azt, amelyik a legtávolabb van az AC szakasztól, és jelöljük ezt P -vel (ha több csúcs is van ugyanolyan távolságra, akkor válasszunk ki közülük az AB oldalhoz legközelebbit). A BP szakaszt biztosan nem metszi el a sokszög egyik oldala sem, mivel egy őt metsző szakasz egyik végpontja az ABC háromszögön belül lenne, de a P pontnál távolabb az AC szakasztól. A BP átló tehát teljes egészében a sokszögön belül halad, így ennek segítségével fel tudjuk bontani két kisebb oldalszámú sokszögre.

Megjegyzés

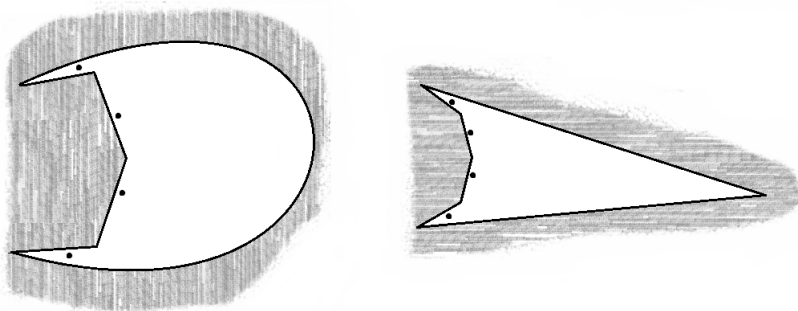
Ez a feladat tipikus példája annak, hogy lehet egy megoldás egyszerre nagyon egyszerű, ugyanakkor nagyon nehéz. Egyszerű, mert nem bonyolult a kulcs gondolat, miszerint a sokszög csúcsai egy kivétellel egy homorú ívre illeszkednek, plusz van még egy csúcs kellően távol, könnyen megérthető, egyből látszik róla, hogy így valóban el lehet helyezni 998 versenyzőt. Másrészt viszont nehéz, mivel nehéz rájönni, kell hozzá valami ötlet. (Itt most csak a megoldás első felére gondolunk, annak bizonyítása, hogy ennél több viszont tényleg nem lehet, már valóban nem mondható egyszerűnek.)

Az ötlet nehézségét érzésünk szerint az adja, hogy amikor az ember megpróbál maga elég képzelni egy sokszöget, még ha egy nagyon furcsa sokszöget is, akkor ez az elrendezés nem jut az eszébe. Ami segíthet, ha nem egyből az egész sokszöget akarjuk felrajzolni, hanem csak mondjuk néhány oldalát. Hogyan lehet, hogy két versenyző nem látja egymást, ha minél kevesebb csúcsot szeretnénk „elhasználni”? Hogyan tudunk ehhez a két versenyzőhöz egy harmadikat hozzávenni úgy, hogy továbbra is minél jobban takarékoskodjunk a csúcsokkal?



Szürkével az erdő, azaz a sokszögön kívüli rész van jelölve.

Ezek után kialakulhat egy elképzelés arról, hogy nagyjából hogyan kellene kinéznie a sokszögnek, végül ebből rá lehet jönni, hogyan lehet ezt valóban minél kevesebb csúcsot elhasználva megvalósítani.



Végeredmények

1. 26
2. I (mint Ilona)
3. 48
4. 0
5. 42
6. 94
7. 4
8. 16
9. 1475
10. 30
11. 6
12. 2
13. 1, 2 és 4
14. 36
15. 998